三次元多様体の量子不変量の面模型(ホップ代数と量子群)

林, 孝宏

数理解析研究所講究録
997 巻 1997 年 166-173

三次元多様体の量子不変量の面模型

林 孝宏 (名大)

1. 序

良く知られているように、量子群の理論は量子逆散乱法における L-作用素のなす代数をその起源としている. 通常 L-作用素は頂点模型と呼ばれるクラスの格子模型に対して考えられているが、筆者は面模型と呼ばれる (ある意味で) より広い格子模型のクラスに対して L-作用素の理論を拡張することを考えてきた. ここではその応用として、Witten-Reshetikhin-Turaev による三次元多様体の不変量 (に一致すると期待される不変量) をリンクダイアグラムの上の状態和の形で構成する話を述べる。これは、カウフマンによるリンクの不変量の状態和表示の、三次元多様体の不変量に対する類似物である.

2. 面代数

頂点模型の場合とは異なり、面模型の L-作用素の代数は双代数にはならず、面代数というより複雑な代数系で記述されることになる. 以下に面代数とその上の諸構造の定義を述べよう.

$\mathfrak{H}$ は代数でありかつ余代数であるようなものとし、$e_i, \mathring{e}_i$ を有限集合 $\mathcal{V}$ の元 i に添字付けられた $\mathfrak{H}$ の元であるとする. このとき、$(\mathfrak{H}, e_i, \mathring{e}_i)$ が $\mathcal{V}$-<u>面代数</u> であるとは次が成り立つことであるとする:

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b), \tag{2.1}$$

$$e_i e_j = \delta_{ij} e_i, \quad \mathring{e}_i\mathring{e}_j = \delta_{ij}\mathring{e}_i, \quad e_i\mathring{e}_j = \mathring{e}_j e_i, \tag{2.2}$$

$$\sum_{k\in\mathcal{V}} e_k = 1 = \sum_{k\in\mathcal{V}} \mathring{e}_k, \tag{2.3}$$

$$\Delta(\mathring{e}_i e_j) = \sum_{k\in\mathcal{V}} \mathring{e}_i e_k \otimes \mathring{e}_k e_j, \quad \varepsilon(\mathring{e}_i e_j) = \delta_{ij}, \tag{2.4}$$

$$\varepsilon(ab) = \sum_{k\in\mathcal{V}} \varepsilon(a e_k)\varepsilon(\mathring{e}_k b). \tag{2.5}$$

面代数の例はグラフを用いて簡単に構成することができる. $\mathcal{G}$ を有限有向グラフとし、$\mathcal{V} = \mathcal{G}^0$ をその頂点の全体とする. $\mathcal{G}$ の辺 $\mathbf{p}$ に対しその始点と終点をそれぞれ $\mathfrak{s}(\mathbf{p})$ と $\mathfrak{r}(\mathbf{p})$ で表す. また、$m \geq 1$ に対し、$\mathcal{G}^m = \coprod_{i,j\in\mathcal{V}}\mathcal{G}^m_{ij}$ を $\mathcal{G}$ の長さ m の <u>パス</u> の全体とする. 即ち、$\mathcal{G}^m_{ij}$ は $\mathcal{G}$ の辺の列 $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m)$ であって、$\mathfrak{s}(\mathbf{p}) := \mathfrak{s}(\mathbf{p}_1) = i$, $\mathfrak{r}(\mathbf{p}_n) = \mathfrak{s}(\mathbf{p}_{n+1})$ $(1 \leq n < m)$、$\mathfrak{r}(\mathbf{p}) := \mathfrak{r}(\mathbf{p}_m) = j$ をみたすようなものの全体であるとする. このとき記号 $e\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$ $(\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{G}^m, m \geq 0)$ により張られる線形空間 $\mathfrak{H}(\mathcal{G})$ は次の演算により $\mathcal{V}$-面代数になる:

$$\mathring{e}_i = \sum_{j\in\mathcal{V}} e\binom{i}{j}, \quad e_j = \sum_{i\in\mathcal{V}} e\binom{i}{j}, \tag{2.6}$$

$$e\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}e\binom{\mathbf{r}}{\mathbf{s}} = \delta_{\mathfrak{r}(\mathbf{p})\mathfrak{s}(\mathbf{r})}\,\delta_{\mathfrak{r}(\mathbf{q})\mathfrak{s}(\mathbf{s})}\,e\binom{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\mathbf{q}\cdot\mathbf{s}}, \tag{2.7}$$

$$\Delta\left(e\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}\right) = \sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{G}^m} e\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{t}}\otimes e\binom{\mathbf{t}}{\mathbf{q}} \quad (\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathcal{G}^m), \tag{2.8}$$

$$\varepsilon\left(e\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}\right) = \delta_{\mathbf{pq}} \quad (\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathcal{G}^m). \tag{2.9}$$

ここで、パス $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_m)$ と $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_n)$ が $\mathfrak{r}(\mathbf{p}) = \mathfrak{s}(\mathbf{r})$ を満たす時、$\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}$ はこれらをつないでできるパス $(\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_m,\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_n)$ である.

命題 **2.1.** 有限生成の面代数はある $\mathfrak{H}(\mathcal{G})$ の商と同型である.

$\mathfrak{H}$ を $\mathcal{V}$-面代数とする. 線形写像 $S\colon\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$ が条件

$$\sum_{(a)} S(a_{(1)})a_{(2)} = \sum_{k\in\mathcal{V}}\varepsilon(ae_k)e_k, \quad \sum_{(a)} a_{(1)}S(a_{(2)}) = \sum_{k\in\mathcal{V}}\varepsilon(e_ka)\mathring{e}_k, \tag{2.10}$$

$$\sum_{(a)} S(a_{(1)})a_{(2)}S(a_{(3)}) = S(a) \quad (a\in\mathfrak{H}) \tag{2.11}$$

をみたすとき、S は $\mathfrak{H}$ の <u>対合射</u> である、または $\mathfrak{H}$ は <u>ホップ面代数</u> であるという. また、$\mathcal{R}^+$、$\mathcal{R}^-$ を $(\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H})^*$ の元とするとき、$(\mathfrak{H},\mathcal{R}^\pm)$ が <u>余準三角</u> であるとは

$$\mathcal{R}^+m^*(1) = \mathcal{R}^+, \quad m^*(1)\mathcal{R}^- = \mathcal{R}^-, \tag{2.12}$$

$$\mathcal{R}^-\mathcal{R}^+ = m^*(1), \quad \mathcal{R}^+\mathcal{R}^- = (m^{\mathrm{op}})^*(1), \tag{2.13}$$

$$\mathcal{R}^+m^*(X)\mathcal{R}^- = (m^{\mathrm{op}})^*(X) \quad (X\in\mathfrak{H}^*), \tag{2.14}$$

$$(m\otimes\mathrm{id})^*(\mathcal{R}^+) = \mathcal{R}^+_{13}\mathcal{R}^+_{23}, \quad (\mathrm{id}\otimes m)^*(\mathcal{R}^+) = \mathcal{R}^+_{13}\mathcal{R}^+_{12} \tag{2.15}$$

が成り立つことを言う. ただし、$m\colon\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$ は $\mathfrak{H}$ の積とし、また $Z\in(\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H})^*$ と $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ に対し、$Z_{ij}\in(\mathfrak{H}^{\otimes 3})^*$ を $Z_{ij}(a_1,a_2,a_3) = Z(a_i,a_j)\varepsilon(a_k)$ $(a_1,a_2,a_3\in\mathfrak{H})$ で定めておく. 準三角ホップ代数のときと同様に $\mathcal{R}^\pm$ はヤングバクスター方程式をみたす:

$$\mathcal{R}^\pm_{12}\mathcal{R}^\pm_{13}\mathcal{R}^\pm_{23} = \mathcal{R}^\pm_{23}\mathcal{R}^\pm_{13}\mathcal{R}^\pm_{12}. \tag{2.16}$$

$(\mathfrak{H},\mathcal{R}^\pm)$ を余準三角ホップ面代数、$\mathcal{V}$ を $\mathfrak{H}^*$ の中心に属する可逆元とする. このとき $(\mathfrak{H},\mathcal{V})$ が<u>余リボンホップ面代数</u> であるとは次が成り立つことをいう:

$$\mathcal{V}^2 = \mathcal{U}S^*(\mathcal{U}), \tag{2.17}$$

$$m^*(\mathcal{V}) = \mathcal{R}^-\mathcal{R}^-_{21}(\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}), \tag{2.18}$$

$$\mathcal{V}(\mathring{e}_ie_j) = \delta_{ij} \quad (i,j\in\mathcal{V}). \tag{2.19}$$

ただし、$\mathcal{U}$ は $\mathfrak{H}$ 上の線形汎関数で

$$\mathcal{U}(a) = \sum_{(a)}\mathcal{R}^+(a_{(2)},S(a_{(1)})) \quad (a\in\mathfrak{H}) \tag{2.20}$$

で定まるものであるとする.

以上複雑な定義が続いたが、これらはいずれも明解な圏論的な意味付けができる.

命題 2.2. 面代数 $\mathfrak{H}$ に対し、その有限次元右余加群の全体 $Com_{\mathfrak{H}}$ はモノイダル圏になる. $\mathfrak{H}$ が全単射な対合射を持つ時には $Com_{\mathfrak{H}}$ はリジッドであり、また $\mathfrak{H}$ が余準三角である時には $Com_{\mathfrak{H}}$ はブレイドモノイダル圏になる. さらに、$\mathfrak{H}$ が余リボンホップ面代数の時は、$Com_{\mathfrak{H}}$ はリボン圏になる.

大雑把にいうとモノイダル圏とは各対象 M, N に対し、結合的な「積」$M \otimes N$ が定まっているようなものをいう. またブレイドモノイダル圏とは、この積が可換、すなわち、適当な条件をみたす同型 $M \otimes N \cong N \otimes M$ が存在するようなものをいう. またリジッドモノイダル圏とは、各対象 M にたいし、その左双対 M^* (および右双対) とよばれる対象が定義されて適当な条件が成り立つ時をいう. リボン圏とはリジッドなブレイドモノイダル圏で各対象 M にたいし、$\otimes$ と「両立」するような同型 $M \cong (M^*)^*$ が存在するようなものをいう. リボン圏が一つ与えられれば、その各対象 M に対して、自然にリンクの不変量が定義されることが知られているので、余リボンホップ面代数が構成できればリンクの不変量の属が得られることになる.

3. ABF 模型と $SU(2)_l$ 型面代数

$l \geq 1$ を自然数とし、$\mathcal{G}$ を A_{l+1}-型のディンキン図形を下図のように有向グラフと見なしたものとする:

$$\overset{0}{\circ} \;\rightleftarrows\; \overset{1}{\circ} \;\rightleftarrows\; \cdots \;\overset{l-1}{\circ} \;\rightleftarrows\; \overset{l}{\circ} \tag{3.1}$$

$\mathcal{G}$ の頂点の全体 $\mathcal{V}$ は $\{0, 1, \cdots, l\}$ と、またパスの集合 $\mathcal{G}^k_{ij}$ は

$$\{(i_0, i_1, \cdots, i_k) |\ 0 \leq i_0, \cdots i_k \leq l,\ |i_\nu - i_{\nu-1}| = 1\,(1 \leq \nu \leq k)\} \tag{3.2}$$

と同一視される. q を 1 の原始 $2(l+2)$ 乗根とし、ε を$\varepsilon^2 = -q$ の解とする. また、$[n] = (q^n - q^{-n})/(q - q^{-1})$ とおく。各 $(h, i, j, k) \in \mathcal{V}^4$ に対し、複素数 $w\binom{h\ i}{j\ k}$ を以下で定め、w を <u>ABF 模型</u> (の <u>ボルツマンウェイト</u>) と呼ぶ:

$$w\begin{bmatrix} i & i\pm 1 \\ i\pm 1 & i \end{bmatrix} = \varepsilon^{-1}\frac{\pm q^{\mp(i+1)}}{[i+1]}, \tag{3.3}$$

$$w\begin{bmatrix} i & i\pm 1 \\ i\mp 1 & i \end{bmatrix} = \varepsilon^{-1}\frac{[i+1\pm 1]}{[i+1]}, \tag{3.4}$$

$$w\begin{bmatrix} i & i\pm 1 \\ i\pm 1 & i\pm 2 \end{bmatrix} = \varepsilon^{-1}(-q), \tag{3.5}$$

$$w\Big[\text{その他}\Big] = 0. \tag{3.6}$$

実はボルツマンウェイト w は $\mathcal{V}^4$ 上の関数とみるよりは $\mathcal{G}$ 上の面の集合 $\left\{\left({}_{\mathbf{r}}{}^{\mathbf{p}}_{\mathbf{q}}{}_{\mathbf{s}}\right)\right\}$ の上の関数と見なした方がより自然である．ここで $\mathcal{G}$ の辺の4つ組 $\left({}_{\mathbf{r}}{}^{\mathbf{p}}_{\mathbf{q}}{}_{\mathbf{s}}\right)$ が <u>面</u> であるとは、ある頂点 $h,i,j,k\in\mathcal{V}$ に対し、

(3.7) $\mathfrak{s}(\mathbf{p})=h=\mathfrak{s}(\mathbf{r}),\quad \mathfrak{r}(\mathbf{p})=i=\mathfrak{s}(\mathbf{s}),\quad \mathfrak{r}(\mathbf{r})=j=\mathfrak{s}(\mathbf{q}),\quad \mathfrak{r}(\mathbf{q})=k=\mathfrak{r}(\mathbf{s})$

であることをいう．このとき、w の $\left({}_{\mathbf{r}}{}^{\mathbf{p}}_{\mathbf{q}}{}_{\mathbf{s}}\right)$ での値を

$$w\left[\mathbf{r}\,{}^{\mathbf{p}}_{\mathbf{q}}\,\mathbf{s}\right]=w\begin{bmatrix}h & i\\ j & k\end{bmatrix} \tag{3.8}$$

で定める．また $\left({}_{\mathbf{r}}{}^{\mathbf{p}}_{\mathbf{q}}{}_{\mathbf{s}}\right)$ が面でないときには $w\left[{}_{\mathbf{r}}{}^{\mathbf{p}}_{\mathbf{q}}{}_{\mathbf{s}}\right]=0$ とおいておく．以上の記号の下で、$SU(2)_l$-型面代数 $\mathfrak{S}$ は $\mathfrak{H}(\mathcal{G})$ を次の2種類の関係式で割ったものとして定義される:

(3.9) 「L-作用素関係式」

$$\sum_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}\in\mathcal{G}^2} w\left[\mathbf{a}\,{}^{\mathbf{c}}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{d}\right]e\begin{pmatrix}\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}\\ \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\end{pmatrix}=\sum_{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}\in\mathcal{G}^2} w\left[\mathbf{r}\,{}^{\mathbf{p}}_{\mathbf{s}}\,\mathbf{q}\right]e\begin{pmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{s}\end{pmatrix}$$
$$(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q},\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\in\mathcal{G}^2),$$

(3.10) 「行列式 $=1$」

$$\det\begin{pmatrix}i\\ j\end{pmatrix}=\delta_{ij}\qquad (i,j\in\mathcal{V}).$$

ただし、$\det\binom{i}{j}$ は $\mathfrak{H}(\mathcal{G})$ を関係式(3.9) で割ってできる代数の元で

$$\det\begin{pmatrix}i\\ j\end{pmatrix}=\frac{[i]}{[j+2]}e\begin{pmatrix}i & i-1 & i\\ j & j+1 & j\end{pmatrix}+\frac{[i+2]}{[j+2]}e\begin{pmatrix}i & i+1 & i\\ j & j+1 & j\end{pmatrix} \tag{3.11}$$
$$(0<i<l,0\le j<l)$$

などにより定義されるものである．

命題 3.1. $SU(2)_l$-型面代数 $\mathfrak{S}$ は余リボンホップ面代数である。

$\mathfrak{S}$ のブレイド構造を具体的に書き下そう．パスの四つ組 $\left(\mathbf{r}\,{}^{\mathbf{p}}_{\mathbf{q}}\,\mathbf{s}\right)$ がサイズ $m\times n$ の <u>境界条件</u> であるとは、$\mathbf{p},\mathbf{q}$ の長さが n、$\mathbf{r},\mathbf{s}$ の長さが m でさらに、ある $h,i,j,k\in\mathcal{V}$ に対し、(3.7) が成り立っていることをいう。特に、1×1 の境界条件とは面のことである。ボルツマンウェイト w を $\{$ サイズ $m\times n$ の境界条件; $m,n\ge1\}$ 上の複素数値関数に次の関係式で拡張したものを w の <u>分配関数</u> と呼ぶ:

$$w\left[\mathbf{r}\,{}^{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}'}_{\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}'}\,\mathbf{s}\right]=\sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{G}^m} w\left[\mathbf{r}\,{}^{\mathbf{p}}_{\mathbf{q}}\,\mathbf{a}\right]w\left[\mathbf{a}\,{}^{\mathbf{p}'}_{\mathbf{q}'}\,\mathbf{s}\right], \tag{3.12}$$

$$w\left[\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'\,{}^{\mathbf{p}}_{\mathbf{q}}\,\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}'\right]=\sum_{\mathbf{a}\in\mathcal{G}^n} w\left[\mathbf{r}\,{}^{\mathbf{p}}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{s}\right]w\left[\mathbf{r}'\,{}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{q}}\,\mathbf{s}'\right] \tag{3.13}$$
$$(\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathcal{G}^n,\mathbf{p}',\mathbf{q}'\in\mathcal{G}^{n'},\mathbf{r},\mathbf{s}\in\mathcal{G}^m,\mathbf{r}',\mathbf{s}'\in\mathcal{G}^{m'}).$$

ただし、$\mathbf{r},\mathbf{s}\in\mathcal{G}^0$ のときは $w\left[\mathbf{r}\,{}^{\mathbf{p}}_{\mathbf{q}}\,\mathbf{s}\right]=\delta_{\mathbf{pq}}$、$\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathcal{G}^0$ のときは $w\left[\mathbf{r}\,{}^{\mathbf{p}}_{\mathbf{q}}\,\mathbf{s}\right]=\delta_{\mathbf{rs}}$ とする．また $\left(\mathbf{r}\,{}^{\mathbf{p}}_{\mathbf{q}}\,\mathbf{s}\right)$ が(3.7) を満たしていないときには $w\left[\mathbf{r}\,{}^{\mathbf{p}}_{\mathbf{q}}\,\mathbf{s}\right]=0$ とする．このとき、$\mathcal{R}^+$ は次式で与えられる:

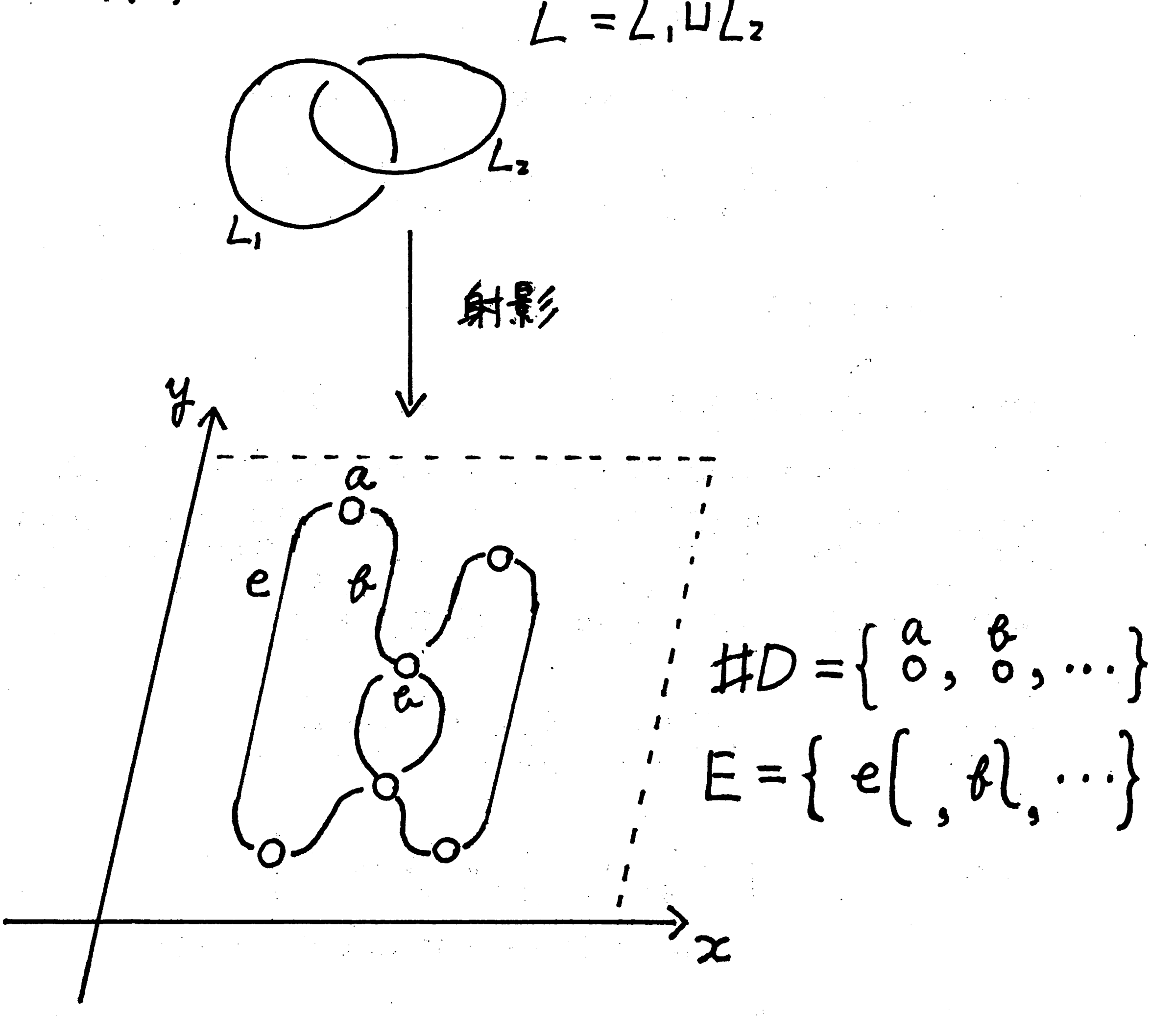
$$\mathcal{R}^+\left(e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix},\, e\begin{pmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{s}\end{pmatrix}\right)=w\left[\mathbf{r}\begin{matrix}\mathbf{q}\\ \\ \mathbf{p}\end{matrix}\mathbf{s}\right]. \tag{3.14}$$

4. 三次元多様体の状態和不変量

この章では $SU(2)_l$-型面代数を用いて得られる、Witten-Reshetikhin-Turaev 型の三次元多様体の不変量の紹介をする．この種の不変量は「任意の三次元多様体 M は S^3 内のフレームつきリンク L に沿った手術により構成される」という事実にもとづいており、実際には平面上に描かれた L のダイアグラム (射影像) に複素数を対応させせることによって得られる．この数を ABF 模型を用いて具体的に書き下そうというのがここでの目的である．

まず、$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ の上に L の「generic」なダイアグラム D を一つ描いておく．D の点のうち L の２点に対応するものを D の ２重点という．また D の点のうち, y-座標の値がそこで極大または極小になっているようなものを L の 端点 という．そして、２重点か端点かのいずれかであるような点を D の特異点 といい、その全体を $\sharp D$ であらわす．D は「generic」であるから、$\sharp D$ は有限集合である．また、２重点でかつ端点であるような点や、３重以上の点は存在しない．$D\setminus\sharp D$ の連結成分を エッジ とよび、その全体を E で表す (図 (ア) 参照).

図(ア)



つぎに、D 上の状態というものを定義する．まず、N_{ij}^k $(0 \le i,j,k \le l)$ を $SU(2)_l$-型の WZW model の fusion rule、すなわち、

$$N_{ij}^k = \begin{cases} 1, & |i-j| \le k \le i+j,\ i+j+k \in 2\mathbb{Z},\ i+j+k \le 2l \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \tag{4.1}$$

とし、集合 $\mathcal{B}$ を

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ ij \end{pmatrix} \middle| \, 0 \le i,j,k \le l,\ N_{ij}^k = 1 \right\} \tag{4.2}$$

で定める．このとき、E から $\mathcal{B}$ への写像 λ が状態であるとは、$e, f \in E$ が L の同じ成分 (S^1 に同相な部分集合) L_μ の像に含まれるとき、ある $c \in \mathcal{V}$ と $h, i, j, k \in \mathcal{V}$ によって、$\lambda(e) = \binom{c}{hi}$, $\lambda(f) = \binom{c}{jk}$ と表されることをいう．このとき、c を $\mathrm{color}(L_\mu, \lambda)$ で表す．また状態の全体を $\mathcal{S}$ で表す．

つぎに、状態 $\lambda \in \mathcal{S}$ と特異点 $a \in \sharp D$ に対し複素数 $\langle \lambda | a \rangle$ を以下のように定める．まず、λ と a が、図(甲)の時、および図(乙)の時にはそれぞれ、

$$\langle \lambda | a \rangle = c \begin{pmatrix} r \\ ih \end{pmatrix}^{-1} \delta_{hk}\delta_{ij}, \tag{4.3}$$

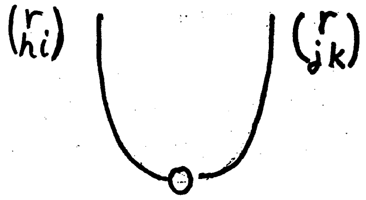
$$\langle \lambda | a \rangle = c \begin{pmatrix} r \\ hi \end{pmatrix} \delta_{hk}\delta_{ij} \tag{4.4}$$

とおく．ただし、

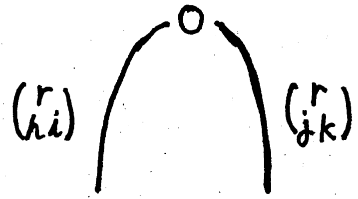
$$c\begin{pmatrix} r \\ ij \end{pmatrix} = \frac{[(-i+j+r)/2]!\,[(i+j+r)/2+1]!\,[(i-j+r)/2]!}{[i+1]\,[(i+j-r)/2]!} \tag{4.5}$$

とする．

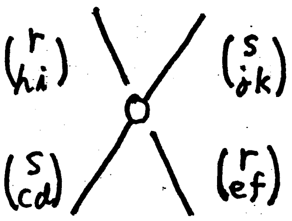
図(甲)



図(乙)



図(丙)



図(丙)

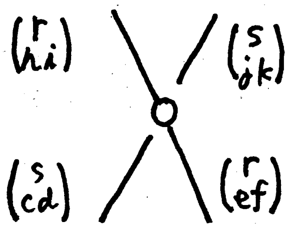


図 (丙) のときには

$$\langle\lambda|a\rangle = \delta_{ij}\delta_{hc}\delta_{de}\delta_{fk}w_{rs}\begin{pmatrix} h & i \\ e & f\end{pmatrix} \tag{4.6}$$

とする. ここで、$w_{rs}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ は ABF 模型の分配関数を用いて次のように定義される量である:

$$w_{rs}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \sum_{\mathbf{u}\in\mathcal{G}^r_{ac}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathcal{G}^s_{cd}} \mathrm{sgn}(\mathbf{u})\mathrm{sgn}(\mathbf{v}) w\left[\mathbf{u}\ \begin{matrix}\mathbf{p}^r_{ab} \\ \mathbf{v}\end{matrix}\ \mathbf{p}^s_{bc}\right]. \tag{4.7}$$

ただし、$\mathbf{p}^k_{ij}$ は長さ k のパスで

$$\mathbf{p}^k_{ij} = (i, i+1, \cdots, (i+j+k)/2, \cdots, j+1, j) \tag{4.8}$$

で与えられるもの、また $\mathbf{p}\in\mathcal{G}^k_{ij}$ に対し、$\mathrm{sgn}(\mathbf{p}) = \pm 1$ は $\mathrm{sgn}(\mathbf{p}^k_{ij}) = 1$ と

$$\mathrm{sgn}\left((\cdots n, n-1, n\cdots)\right) = -\mathrm{sgn}\left((\cdots n, n+1, n\cdots)\right) \tag{4.9}$$

により定まるものであるとする. 図 (丁) のときにも図 (丙) のときと同様にして $\langle\lambda|a\rangle$ は定義される.

次が本稿の主結果である.

定理 4.1. 三次元多様体 M の不変量 $\tau(M)$ が

$$\tau(M) = \Delta^{\sigma(L)}\mathcal{D}^{-\sigma(L)-m-1}\sum_{\lambda\in\mathcal{S}}\prod_{\mu=1}^{\nu}[\mathrm{color}(L_\mu,\lambda)+1]\prod_{a\in\sharp D}\langle\lambda|a\rangle \tag{4.10}$$

によって定まる. ここで、$\{L_1,\ldots,L_\nu\}$ は L の成分の全体、Δ と $\mathcal{D}$ は多様体 M によらないある定数、また $\sigma(L)$ は L の linking matrix の符号である.

5. 不変量の構成法

Turaev の教科書 [14] によれば Witten-Reshetikhin-Turaev 型の三次元多様体の不変量を得るには、モジュラー圏というものを構成すれば十分である. モジュラー圏とは、「有限半単純」なリボン圏であってある種の非退化条件をみたすものをいう. 我々の不変量もこの一般的結果に依っている. すなわち次が成り立つ.

定理 5.1. $SU(2)_l$-型面代数 $\mathfrak{S}$ の有限次元右余加群の全体はモジュラー圏になる.

これにより、(4.10) のような形の不変量が存在することが保証されるわけであるが、$\langle\lambda|a\rangle$ などの具体的な値を決定するには、$\mathfrak{S}$ の各余加群の構造をさらにくわしく調べる必要がある. 以下これについて簡単に説明する. Σ を記号 $\sigma(\mathbf{p})$ $(\mathbf{p}\in\mathcal{G}^k, k\geq 0)$ を生成元とし、基本関係式

$$\sigma(\mathbf{p})\sigma(\mathbf{q}) = \delta_{\mathfrak{r}(\mathbf{p})\mathfrak{s}(\mathbf{q})}\,\sigma(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}), \tag{5.1}$$

$$\sigma(i,i+1,i) = -\sigma(i,i-1,i) \quad (0<i<l), \tag{5.2}$$

$$\sigma(0,1,0) = \sigma(l,l-1,l) = 0 \tag{5.3}$$

によって定義される代数とする. Σ はパスの長さについての次数付け $\Sigma = \bigoplus_{k\in\mathcal{V}}\Sigma_k$ をもつが、各成分 Σ_k は

$$\sigma(\mathbf{q}) \mapsto \sum_{\mathbf{p}\in\mathcal{G}^k}\sigma(\mathbf{p})\otimes e\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix} \quad (\mathbf{q}\in\mathcal{G}^k), \tag{5.4}$$

により、既約な $\mathfrak{S}$-余加群になる. $\langle\lambda|a\rangle$ の決定は、Σ の基底$\left\{\sigma(\mathrm{p}_{ij}^k)\middle|\binom{k}{ij}\in\mathcal{B}\right\}$を用いて圏の構造射を具体的に記述することによってなされる.

References

1. V. G. Drinfeld, Almost cocomutative Hopf algebras, *Leningrad Math. J.* **1** (1990), 321-342.
2. T. Hayashi, An algebra related to the fusion rules of Wess-Zumino-Witten models, *Lett. Math Phys.* **22** (1991), 291-296.
3. T. Hayashi, Quantum group symmetry of partition functions of IRF models and its application to Jones' index theory, *Commun. Math. Phys.* **157** (1993), 331-345.
4. T. Hayashi, Face algebras and their Drinfeld doubles, *in* "Proceedings of Symposia in Pure Mathematics," Vol 56, Part 2, American Mathematical Society, 1994.
5. T. Hayashi, Face algebras I — A generalization of quantum group theory, to appear in *J. Math. Soc. Japan.*
6. T. Hayashi, Compact quantum groups of face type, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **32** (1996), 351 - 369.
7. T. Hayashi, Galois quantum groups of II_1-subfactors, preprint.
8. T. Hayashi, Face algebras II — Standard generator theorems, in preparation.
9. T. Hayashi, Face models of quantum invariants of links and 3-manifolds, in preparation.
10. N. Reshetikhin and V. Turaev, Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups, *Invent. Math.* **103** (1991), 547-598.
11. N. Reshetikhin, L. Takhtadzhyan and L. Faddeev, Quantization of Lie groups and Lie algebras, *Leningrad Math. J.* **1** (1990), 193-225.
12. P. Schauenburg, Face algebras are $\times_R$-bialgebras, preprint.
13. M. Sweedler, "Hopf algebras," Benjamin Inc., New York, 1969.
14. V. Turaev, "Quantum invariants of knots and 3-manifolds," Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1994.
15. E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial, *Comm. Math. Phys.* **121** (1989), 351-399.